微分形式とベクトル解析

ゐぶ

概要

本稿は微分形式などを簡単に説明し, ベクトル解析で扱う gradient(勾配) や rotation(回転) や divergence(発散) が $\mathbf{R}^3$ のド・ラーム複体と外微分を用いる事で理解できることを述べる. そして, 最後にその性質が外微分の性質と一致していることをみる.

1　微分形式と外微分

まず, 微分形式と外微分について簡単に述べる.

1.1　外積代数

Definition 1.1 (交代 k 重線形関数)

$\mathfrak{S}_k$ を k 次対称群とし, V を線型空間とする. このとき, $f\colon V^k \to \mathbf{R}$ が k 重線形関数であり,

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\mathrm{sgn}\ \sigma) f(v_1, \dots, v_k)$$

を満たすとき, 交代 k 重線形関数という.

線型空間 V 上の全ての交代 k 重線形関数からなる線型空間を $A_k(V)$ と表す. 線型空間 V 上の 2 つの交代多重線形関数に対し, ウェッジ積という交代多重線形関数を得ることができる

Definition 1.2 (ウェッジ積)

V を線型空間とし, $f \in A_k(V),\ g \in A_l(V)$ とする. このとき, 以下により定まる $f \wedge g \in A_{k+l}(V)$ をウェッジ積という.

$$\begin{array}{cccc} f \wedge g: & V^{k+l} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \cup\!\!\!\!\!\!\!\!\;\; & & \cup \\ & (v_1, \dots, v_{k+l}) & \longmapsto & \dfrac{1}{k!l!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} (\mathrm{sgn}\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{array}$$

$e_1, \dots, e_n$ を V の基底とし, $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ を双対空間 $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbf{R})$ の双対基底とする.
ここで, 多重指数

$$I = (i_1, \dots, i_k)$$

を導入し, $e_I = (e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, $\alpha^I = (\alpha^{(i_1)} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(i_k)})$ と表すことにすると, $A_k(V)$ の基底は α^I $(I = (i_1 < \cdots < i_k))$ である.

Definition 1.3 (外積代数)

V を n 次元線型空間とする. このとき,

$$A_*(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} A_k(V)$$

はウェッジ積を乗法として反交換次数付き代数となり, 外積代数またはグラスマン代数という.

1.2 $\mathbf{R}^n$ 上の微分形式

$x_1, \ldots x_n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準座標とする.

Definition 1.4 (k 次微分形式)

U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする. このとき, U の各点 p に接空間 $T_p(\mathbf{R}^n)$ 上の交代 k 重線形関数 $\omega_p \in A_k(T_p\mathbf{R}^n)$ を割り当てる写像を U 上の k 次微分形式または k 形式という.

$A_k(T_p\mathbf{R}^n)$ の基底は,

$$dx_p^I = dx_p^{(i_1)} \wedge \cdots \wedge dx_p^{(i_k)} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n)$$

であるため, ω_p は,

$$\omega_p = \sum_I f_I dx_p^I$$

と表せる. よって, U 上の k 次微分形式 ω は,

$$\omega = \sum_I f_I dx^I$$

と表せる. $f_I \colon U \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級のとき, ω は C^∞ 級であるという.

$\mathbf{R}^n$ の開集合 U 上の C^∞ 級 k 次微分形式からなる線型空間を $\Omega^k(U)$ と表す.
U 上の C^∞ 級 0 次微分形式は U の各点 p に $A_0(T_p\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}$ の元を対応させるため, $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ である.

1.3 外微分とド・ラーム複体

U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする. このとき, 作用素

$$\begin{array}{cccc} d\colon & \Omega^0(U) = C^\infty(U) & \longrightarrow & \Omega^1(U) \\ & \cup & & \cup \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)} \end{array}$$

を C^∞ 級 0 次微分形式の外微分といい, $k \geq 1$ に対し, 作用素

$$\begin{array}{cccc} d\colon & \Omega^k(U) & \longrightarrow & \Omega^{k+1}(U) \\ & \cup & & \cup \\ & \omega = \displaystyle\sum_I f_I \wedge dx^I & \longmapsto & \displaystyle\sum_I df_I \wedge dx^I \end{array}$$

を C^∞ 級 k 次微分形式の外微分という.

Proposition 1.5

$d^2 = 0$

Proof

$$\begin{aligned}
\forall\omega = \sum_I f_I dx^I \in \Omega^k(U),\ d^2\left(\sum_I f_I dx^I\right) &= d\left(\sum_I df_I \wedge dx^I\right) \\
&= d\left(\sum_I \sum_j \frac{\partial f_I}{\partial x^{(j)}} \wedge dx^I\right) \\
&= \sum_I \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 f_I}{\partial x^{(k)} \partial x^{(j)}} dx^{(k)} \wedge dx^{(j)} \wedge dx^I \\
&= \frac{1}{2} \sum_I \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 f_I}{\partial x^{(k)} \partial x^{(j)}} dx^{(k)} \wedge dx^{(j)} \wedge dx^I \\
&+ \frac{1}{2} \sum_I \sum_k \sum_j \frac{\partial^2 f_I}{\partial x^{(j)} \partial x^{(k)}} dx^{(j)} \wedge dx^{(k)} \wedge dx^I \\
&= \frac{1}{2} \sum_I \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 f_I}{\partial x^{(k)} \partial x^{(j)}} dx^{(k)} \wedge dx^{(j)} \wedge dx^I \\
&- \frac{1}{2} \sum_I \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 f_I}{\partial x^{(k)} \partial x^{(j)}} dx^{(k)} \wedge dx^{(j)} \wedge dx^I \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

線型空間の族 $\{V^k\}_{k=0}^{\infty}$ と $d_{k+1} \circ d_k = 0$ を満たす線形写像 $d_k \colon V^k \to V^{k+1}$ の集まり

$$V^0 \xrightarrow{d_0} V^1 \xrightarrow{d_1} V^2 \xrightarrow{d_2} V^3 \longrightarrow \cdots$$

を微分複体またはコチェイン複体という.

$\{\Omega^k(U)\}_{k=0}^{\infty}$ と $d \colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ の集まり

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U) \longrightarrow \cdots$$

は微分複体をなし, ド・ラーム複体という.

2 ベクトル解析

まず, ベクトル解析の基本的なことを述べ, 微分形式の性質により理解できることを述べる.

2.1　勾配と回転と発散

$\mathbf{R}^3$ の 2 つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ b^{(3)} \end{pmatrix}$ に対し, 内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ と外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^{(1)}b^{(1)} + a^{(2)}b^{(2)} + a^{(3)}b^{(3)},\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a^{(2)}b^{(3)} - a^{(3)}b^{(2)} \\ -(a^{(1)}b^{(3)} - a^{(3)}b^{(1)}) \\ a^{(1)}b^{(2)} - a^{(2)}b^{(1)} \end{pmatrix}$$

と与えられる. また, $\mathbf{R}^3$ の開集合 U 上のスカラー値関数およびベクトル値関数における 3 つの作用素 gradient(勾配) や rotation(回転) や divergence(発散) は,

$$\{\text{スカラー値関数}\} \xrightarrow{\text{grad}} \{\text{ベクトル値関数}\} \xrightarrow{\text{rot}} \{\text{ベクトル値関数}\} \xrightarrow{\text{div}} \{\text{スカラー値関数}\}$$

$$\text{grad}\ f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \\ \frac{\partial}{\partial x^{(2)}} \\ \frac{\partial}{\partial x^{(3)}} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} \\ \frac{\partial f}{\partial x^{(2)}} \\ \frac{\partial f}{\partial x^{(3)}} \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \\ \frac{\partial}{\partial x^{(2)}} \\ \frac{\partial}{\partial x^{(3)}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x^{(2)}} - \frac{\partial f_2}{\partial x^{(3)}} \\ -(\frac{\partial f_3}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial f_1}{\partial x^{(3)}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}} \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \\ \frac{\partial}{\partial x^{(2)}} \\ \frac{\partial}{\partial x^{(3)}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial f_2}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial f_3}{\partial x^{(3)}}$$

と与えられる.

2.2　微分形式によるベクトル解析

ここで, ベクトル値関数 $\mathbf{F}\colon U \to \mathbf{R}^3$ は U の各点 p に対し, ベクトル $\mathbf{F}_p \in \mathbf{R}^3 \cong T_p(\mathbf{R}^3)$ を対応させるため, U 上のベクトル場である. よって, U 上のベクトル場を $\mathfrak{X}(U)$ と表すと, 図式

$$C^\infty(U) \xrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{X}(U) \xrightarrow{\text{rot}} \mathfrak{X}(U) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(U)$$

を得る.

$\Omega^1(U)$ と $\mathfrak{X}(U)$ は,

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(U) & \longleftrightarrow & \mathfrak{X}(U) \\ \cup & & \cup \\ f_1dx^{(1)} + f_2dx^{(2)} + f_3dx^{(3)} & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \end{array}$$

により同一視できる. また, $\Omega^2(U)$ と $\mathfrak{X}(U)$ は,

$$\begin{array}{ccc} \Omega^2(U) & \longleftrightarrow & \mathfrak{X}(U) \\ \cup & & \cup \\ f_1 dx^{(2)} \wedge dx^{(3)} + f_2 dx^{(3)} \wedge dx^{(1)} + f_3 dx^{(1)} \wedge dx^{(2)} & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \end{array}$$

により同一視できる. また, $\Omega^3(U)$ と $C^\infty(U)$ は,

$$\begin{array}{ccc} \Omega^3(U) & \longleftrightarrow & C^\infty(U) \\ \cup & & \cup \\ f dx^{(1)} \wedge dx^{(2)} \wedge dx^{(3)} & \longleftrightarrow & f \end{array}$$

により同一視できる.

以上の同一視を踏まえると, $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$ の外微分 $d\colon \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$ と $\mathrm{grad}\colon \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$ は,

$$df = \tfrac{\partial f}{\partial x^{(1)}} dx^{(1)} + \tfrac{\partial f}{\partial x^{(2)}} dx^{(2)} + \tfrac{\partial f}{\partial x^{(3)}} dx^{(3)} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} \\ \frac{\partial f}{\partial x^{(2)}} \\ \frac{\partial f}{\partial x^{(3)}} \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\ f$$

により同一視できる. また, $\mathbf{F} = f_1 dx^{(1)} + f_2 dx^{(2)} + f_3 dx^{(3)} \in \Omega^1(U)$ の外微分 $d\colon \Omega^1(U) \to \Omega^2(U)$ と $\mathrm{rot}\colon \Omega^1(U) \to \Omega^2(U)$ は,

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^{(2)}} - \frac{\partial f_2}{\partial x^{(3)}}\right) dx^{(2)} \wedge dx^{(3)} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial f_1}{\partial x^{(3)}}\right) dx^{(3)} \wedge dx^{(1)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}}\right) dx^{(1)} \wedge dx^{(2)}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x^{(2)}} - \frac{\partial f_2}{\partial x^{(3)}} \\ -(\frac{\partial f_3}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial f_1}{\partial x^{(3)}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}} \end{pmatrix} = \mathrm{rot}\ \mathbf{F}$$

により同一視できる. また, $\mathbf{F} = f_1 dx^{(2)} \wedge dx^{(3)} + f_2 dx^{(3)} \wedge dx^{(1)} + f_3 dx^{(1)} \wedge dx^{(2)} \in \Omega^2(U)$ の外微分 $d\colon \Omega^2(U) \to \Omega^3(U)$ と $\mathrm{div}\colon \Omega^2(U) \to \Omega^3(U)$ は,

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial f_2}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial f_3}{\partial x^{(3)}}\right) dx^{(1)} \wedge dx^{(2)} \wedge dx^{(3)}$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial f_2}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial f_3}{\partial x^{(3)}} = \mathrm{div}\ \mathbf{F}$$

により同一視される. したがって, 図式

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\cong"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\cong"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\cong"] & \Omega^3(U) \arrow[d, "\cong"] \\
C^\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{grad}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & C^\infty(U)
\end{tikzcd}$$

を得る.

以上により,

$$\mathrm{rotgrad}\ f = \mathbf{0},\ \mathrm{divrot}\ \mathbf{F} = 0$$

は

$$d^2 = 0$$

に対応していることがわかる.

参考文献

[1] Loring W. Tu (著)・「An Introduction to Manifolds」・Springer・2010

[2] Raoul Bott (著), Loring W. Tu (著)・「Differential Forms in Algebraic Topology」・Springer・2010